数理解析研究所講究録
945 巻 1996 年 153-162

結合型最短経路問題について

長崎大教養　丸山幸宏（Yukihiro Maruyama）

1　序

有向グラフ $G=(V,A)$, 始点 1, 終点 N が与えられているとする。また各枝 $(i,j)\in A$ には各々、枝長 t_{ij} が与えられているとする。頂点 1 から頂点 N への路 $(1,j_1,j_2,\ldots,j_k,N)$ の長さを

$$t_{1j_1}\circ t_{j_1j_2}\circ\cdots\circ t_{j_{k-1}j_k}\circ t_{j_kN},$$

とする。ただし、$\circ:R^1\times R^1\to R^1$ は結合法則：$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$.をみたす 2 項演算である。このとき次のような問題を考える：

$$\min_{(1,j_1,\ldots,j_k,N)}[t_{1j_1}\circ t_{j_1j_2}\circ\cdots\circ t_{j_kN}], \tag{1}$$

このような問題を結合型最短経路問題と呼ぶことにする。

枝長 t_{ij} を結合する 2 項演算 $\circ$として最も有名なのは、足し算の場合だが、それにより経路の長さが定義された問題を加法型最短経路問題と呼ぶことにする。この問題については、$t_{ij}\geq 0$ $(\forall(i,j)\in A)$ の場合は Dijkstra の方法、および $t_{ij}<0$ を許す場合は Ford の方法をはじめ数多くの研究がなされている。

非加法型最短経路問題 ($\circ\neq+$) に関しては、$\circ=\vee,\wedge$ の場合、Iwamoto([1]), Sniedovich ([4]) 等により研究されており、また $\circ=\times$ で、$t_{ij}\geq 0(\forall(i,j)\in A)$ の場合は Iwamoto([1]), Sniedovich([4]) および Smith([3]) により解法が与えられた。しかし、これまでの方法によると、$\circ=\times$ で、$t_{ij}<0$ も許すと解けない場合が生ずる。一方、次節以降に述べる方法を用いると $t_{ij}<0$ も許す場合でも解け、さらに扱う問題として一般の、結合法則をみたす 2 項演算により路長が定義された問題（結合型最短経路問題）について考えるので、これまで研究されてきた演算のみならず $a\circ b=a+b-ab$, $a\circ b=\frac{a+b}{1+ab}$, $a\circ b=\frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$ という新たな演算により路長が定義された問題も解けることになる。

2　両的計画法による解法

本節では 近年 Iwamoto([2]) により提唱された両的計画法に基づき、結合型最短経路問題の解法を与える。

まず本研究で扱う結合型最短経路問題に関して、以下を仮定する：仮定 1: 2 つの頂点間の路として、閉路は含まない。 仮定 2: 集合 S は 2 項演算 $\circ$ に関して半群であり $(\circ:S\times S\to S)$, 各 $i,j\in V$ に対して $t_{ij}\in S$ とする。 仮定 3: 集合 S は右単位元をもつ:$a\circ R(\circ)=a$ $\forall a\in S$. 仮定 4: $S=A^+\cup A^-, A^+\cap A^-=\emptyset$ であり、

$$a\in A^+,a_1,a_2\in S,a_1\leq a_2 \implies a\circ a_1\leq a\circ a_2,$$
$$a\in A^-,a_1,a_2\in S,a_1\leq a_2 \implies a\circ a_1\geq a\circ a_2,$$

をみたす。

以上の仮定を満たすものの例を以下に与える。

例 1. $\circ = +$ の場合、$S = R^1 = A^+$, $A^- = \emptyset$, $R(+) = 0$ にたいして仮定 2 ∼ 4 をみたす。

例 2. $\circ = \wedge$ の場合、$S = [a, b] = A^+$, $A^- = \emptyset$, $R(\wedge) = b$ とし、$\circ = \vee$ の場合、$S = [a, b] = A^+$, $A^- = \emptyset$, $R(\vee) = a$ とすると仮定 2 ∼ 4 をみたす。

以上はいずれも $A^- = \emptyset$ となる例だが、以下は、必ずしも $A^- = \emptyset$ とはならない例である。

例 3. $a \circ b = ab$ の場合、$S = R^1$, $R(\times) = 1$, $A^+ = \{a | a \geq 0\}$, $A^- = \{a | a < 0\}$, にたいして仮定 2 ∼ 4 が成り立つ。

例 4. $a \circ b = a + b - ab$ の場合、$S = R^1$, $R(\circ) = 0$, $A^+ = \{a | a \leq 1\}$, $A^- = \{a | a > 1\}$, にたいして仮定 2 ∼ 4 が成り立つ。

例 5. $a \circ b = \dfrac{a+b}{1+ab}$ の場合、$R(\circ) = 0$, とし、S として (I) $S = (-1, 1) = A^+$, $A^- = \emptyset$, (II) $S = [0, +\infty)$, $A^+ = [0, 1)$, $A^- = [1, +\infty)$, (III) $S = (-\infty, 0]$, $A^+ = (-1, 0]$, $A^- = (-\infty, -1]$ という 3 つの場合を考えると、仮定 2 ∼ 4 が成り立つ。

例 6. $a \circ b = \dfrac{ab}{1 + (1-a)(1-b)}$ の場合、$R(\circ) = 1$, (I)' $S = (0, 2) = A^+$, $A^- = \emptyset$, (II)' $S = (-\infty, 1]$, $A^+ = (0, 1]$, $A^- = (-\infty, 0]$, (III)' $S = [1, +\infty)$, $A^+ = [1, 2)$, $A^- = [2, +\infty)$ という 3 つの場合を考えると、仮定 2 ∼ 4 が成り立つ。

さて、問題 (1) を解くために次の問題群を考える:

$$
\begin{aligned}
f_i &= \min_{(i,j_1,\ldots,j_k,N)} [t_{ij_1} \circ t_{j_1 j_2} \circ \cdots \circ t_{j_k N}], \\
F_i &= \mathop{\mathrm{Max}}_{(i,j_1,\ldots,j_k,N)} [t_{ij_1} \circ t_{j_1 j_2} \circ \cdots \circ t_{j_k N}], \quad \text{for } i \neq N, \\
f_N &= F_N = R(\circ).
\end{aligned}
$$

このとき、仮定 1 から仮定 4 の下に、$\{(f_i, F_i) | i \in V\}$ は次の関係式をみたす：

定理 1

$$
\begin{aligned}
f_i &= \min_{j \in D^+(i)} [t_{ij} \circ f_j] \wedge \min_{j \in D^-(i)} [t_{ij} \circ F_j], && (2) \\
F_i &= \mathop{\mathrm{Max}}_{j \in D^+(i)} [t_{ij} \circ F_j] \vee \mathop{\mathrm{Max}}_{j \in D^-(i)} [t_{ij} \circ f_j], \quad \text{for } i \neq N, && (3) \\
f_N &= F_N = R(\circ). && (4)
\end{aligned}
$$

ただし、

$$
\begin{aligned}
D^+(i) &= \{j \in D(i) \mid (i,j) \in A, t_{ij} \in A^+\}, \\
D^-(i) &= \{j \in D(i) \mid (i,j) \in A, t_{ij} \in A^-\}.
\end{aligned}
$$

関係式 (2), (3) からわかるように、最適値 f_i と F_i は互いに関連している。境界条件 (4) のもとで、方程式系 (2), (3) を解き、ベクトル $\{(f_i, F_i) | i \in V\}$ を求めれば f_1、すなわち、

始点1から終点Nへの最短経路の路長が求まる。なお、上記方程式を解くと、最短経路の路長のみならず、最長経路の路長まで同時に求められる。このように最小化問題と最大化問題を同時に解いていく手法は最近 Iwamoto([2]) により、提唱された両的計画法に基づくもである。

関係式 (2) ～ (4) は、ベクトル $\{(f_i, F_i)|i \in V\}$ に関する方程式であるが、この解について次のことが成り立つ。

定理 2

与えられた境界条件式 (4) のもとに、方程式系 (2), (3) の解はただ一つ存在する.

注意 1

以上は最短経路および最長経路の路長の求め方であるが、最短経路および最長経路そのものの求め方は以下の通りである：

$$
\begin{aligned}
f_i &= \min_{j \in D^+(i)} [t_{ij} \circ f_j] \wedge \min_{j \in D^-(i)} [t_{ij} \circ F_j], \\
&= t_{i\hat{j}(i)} \circ f_{\hat{j}(i)} \text{ or } t_{i\hat{j}(i)} \circ F_{\hat{j}(i)} \\
F_i &= \operatorname*{Max}_{j \in D^+(i)} [t_{ij} \circ F_j] \vee \operatorname*{Max}_{j \in D^-(i)} [t_{ij} \circ f_j], \\
&= t_{ij^*(i)} \circ F_{j^*(i)} \text{ or } t_{ij^*(i)} \circ f_{j^*(i)}
\end{aligned}
$$

$$
\hat{j}_1 = \hat{j}(i), \hat{j}_2 = \begin{cases} \hat{j}(\hat{j}_1), & \text{if } \hat{j}_1 \in D^+(i), \\ j^*(\hat{j}_1), & \text{if } \hat{j}_1 \in D^-(i). \end{cases}
\hat{j}_3 = \begin{cases} \hat{j}(\hat{j}_2), & \text{if } \hat{j}_2 \in D^+(\hat{j}_1), \hat{j}_2 = \hat{j}(\hat{j}_1), \\ j^*(\hat{j}_2), & \text{if } \hat{j}_2 \in D^+(\hat{j}_1), \hat{j}_2 = j^*(\hat{j}_1), \\ j^*(\hat{j}_2), & \text{if } \hat{j}_2 \in D^-(\hat{j}_1), \hat{j}_2 = \hat{j}(\hat{j}_1), \\ \hat{j}(\hat{j}_2), & \text{if } \hat{j}_2 \in D^-(\hat{j}_1), \hat{j}_2 = j^*(\hat{j}_1), \end{cases}
$$

$$
, \ldots, \hat{j}_k = \begin{cases} \hat{j}(\hat{j}_{k-1}), & \text{if } \hat{j}_{k-1} \in D^+(\hat{j}_{k-2}), \hat{j}_{k-1} = \hat{j}(\hat{j}_{k-2}), \\ j^*(\hat{j}_{k-1}), & \text{if } \hat{j}_{k-1} \in D^+(\hat{j}_{k-2}), \hat{j}_{k-1} = j^*(\hat{j}_{k-2}), \\ j^*(\hat{j}_{k-1}), & \text{if } \hat{j}_{k-1} \in D^-(\hat{j}_{k-2}), \hat{j}_{k-1} = \hat{j}(\hat{j}_{k-2}), \\ \hat{j}(\hat{j}_{k-1}), & \text{if } \hat{j}_{k-1} \in D^-(\hat{j}_{k-2}), \hat{j}_{k-1} = j^*(\hat{j}_{k-2}), \end{cases} , \ldots,
$$

および

$$
j_1^* = j^*(i), j_2^* = \begin{cases} j^*(j_1^*), & \text{if } j_1^* \in D^+(i), \\ \hat{j}(j_1^*), & \text{if } j_1^* \in D^-(i), \end{cases}
j_3^* = \begin{cases} j^*(j_2^*), & \text{if } j_2^* \in D^+(j_1^*), j_2^* = j^*(j_1^*), \\ \hat{j}(j_2^*), & \text{if } j_2^* \in D^+(j_1^*), j_2^* = \hat{j}(j_1^*), \\ \hat{j}(j_2^*), & \text{if } j_2^* \in D^-(j_1^*), j_2^* = j^*(j_1^*), \\ j^*(j_2^*), & \text{if } j_2^* \in D^-(j_1^*), j_2^* = \hat{j}(j_1^*), \end{cases},
$$

$$
, \ldots, j_k^* = \begin{cases} j^*(j_{k-1}^*), & \text{if } j_{k-1}^* \in D^+(j_{k-2}^*), j_{k-1}^* = j^*(j_{k-2}^*), \\ \hat{j}(j_{k-1}^*), & \text{if } j_{k-1}^* \in D^+(j_{k-2}^*), j_{k-1}^* = \hat{j}(j_{k-2}^*), \\ \hat{j}(j_{k-1}^*), & \text{if } j_{k-1}^* \in D^-(j_{k-2}^*), j_{k-1}^* = j^*(j_{k-2}^*), \\ j^*(j_{k-1}^*), & \text{if } j_{k-1}^* \in D^-(j_{k-2}^*), j_{k-1}^* = \hat{j}(j_{k-2}^*), \end{cases} , \ldots,
$$

とおく。このとき

$$
(i, \hat{j}_1, \hat{j}_2, \ldots, \hat{j}_k, \ldots, N)
$$

が頂点 i から頂点 Nへの最短経路であり、

$$(i, j_1^*, j_2^*, \ldots, j_k^*, \ldots, N)$$

が頂点 i から頂点 Nへの最長経路となる。

以下、各々の演算について関係式（再帰式）(2), (3), (4) を調べる。

例 7. 2 項演算が $+$ の場合、$t_{ij} \in S = A_+ = R^1, A_- = \emptyset$ なので、$D^-(i) = \emptyset$, $D^+(i) = D(i)$ となり、つぎの再帰式が成り立つ：

$$\begin{aligned} f_i &= \min_{j \in D(i)} [t_{ij} + f_j], && (5)\\ F_i &= \operatorname*{Max}_{j \in D(i)} [t_{ij} + F_j] \text{ for } i \neq N\ , && (6)\\ f_N &= F_N = 0. && (7) \end{aligned}$$

この場合は (5), (6) のように、最適値 f_i と F_i の間に関連はなく, 問題 (2) を解くために、(5), (7) だけを用いればよい。

例 8. 2 項演算が $\wedge(\vee)$ の場合も、$t_{ij} \in S = A_+ = [a, b], A_- = \emptyset$ より、$D^-(i) = \emptyset$, $D^+(i) = D(i)$ となり、つぎの再帰式が成り立つ：

$$\begin{aligned} f_i &= \min_{j \in D(i)} [t_{ij} \wedge f_j], && (8)\\ F_i &= \operatorname*{Max}_{j \in D(i)} [t_{ij} \wedge F_j] \text{ for } i \neq N, && (9)\\ f_N &= F_N = b. && (10) \end{aligned}$$

この場合も、例 7 と同様で、問題 (2) を解くために、(8), (10) だけを用いればよい。

一方、以下の例題では最適値 f_i と F_i が お互いに関連を持つような演算について考える。

例 9. 2 項演算が $\times$ の場合、例 3 のように S, A^+, A^- を定義すると、$D^+(i) = \{j | t_{ij} \geq 0\}$, $D^-(i) = \{j | t_{ij} < 0\}$ であり、つぎの再帰式が成り立つ：

$$\begin{aligned} f_i &= \min_{t_{ij} \geq 0} [t_{ij} \times f_j] \wedge \min_{t_{ij} < 0} [t_{ij} \times F_j], && (11)\\ F_i &= \operatorname*{Max}_{t_{ij} \geq 0} [t_{ij} \times F_j] \vee \operatorname*{Max}_{t_{ij} < 0} [t_{ij} \times f_j], \text{ for } i \neq N, && (12)\\ f_N &= F_N = 1. && (13) \end{aligned}$$

この場合は (11), (12) のように、最適値 f_i と F_i は お互いに関連をもち, また例 7 の (5), (7) のような再帰式が成立しない例が作れる (例 10 参照)。

例 10. 図 1 のようなネットワークを考えると、

$$\begin{aligned} f_1 &= \{2 \times 2 \times (-2)\} \wedge \{2 \times 1 \times 2\}\\ &\quad \wedge \{(-2) \times 3 \times 2\} \wedge \{(-2) \times 1 \times 2\}\\ &= (-8) \times 4 \times (-12) \times (-4) = -12 \end{aligned}$$

であり、一方、

$$\begin{aligned} \min_{j \in D(1)} [t_{1j} \times f_j] &= [t_{12} \times f_2] \wedge [t_{13} \times f_3]\\ &= [2 \times (-4)] \wedge [(-2) \times 2] = -8 \end{aligned}$$

なので、

$$f_1 \neq \min_{j \in D(1)} [t_{1j} \times f_j]$$

である。

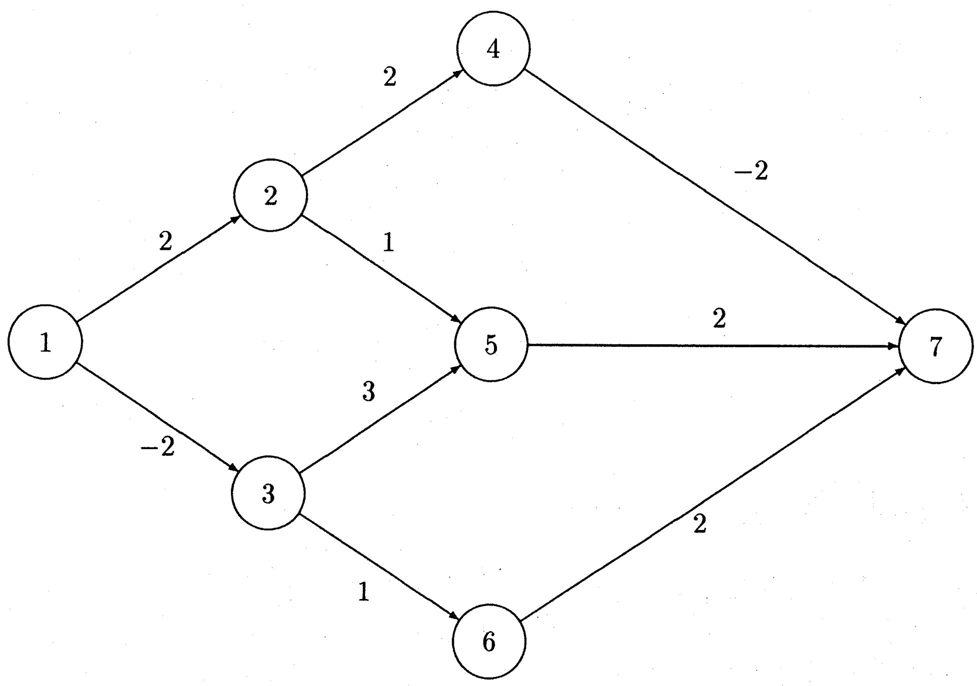

図 1: $a \circ b = a \times b$

例 11. $a \circ b = a + b - ab$ の場合、例 4 のように S, A^+, A^- を定義すると、$D^+(i) = \{j | t_{ij} \leq 1\}$, $D^-(i) = \{j | t_{ij} > 1\}$ となりつぎの再帰式が成り立つ：

$$\begin{aligned} f_i &= \min_{t_{ij} \leq 1} [t_{ij} + f_j - t_{ij} f_j] \wedge \min_{t_{ij} > 1} [t_{ij} + F_j - t_{ij} F_j], \\ F_i &= \operatorname*{Max}_{t_{ij} \leq 1} [t_{ij} + F_j - t_{ij} F_j] \vee \operatorname*{Max}_{t_{ij} > 1} [t_{ij} + f_j - t_{ij} f_j], \quad \text{for } i \neq N, \\ f_N &= F_N = 0. \end{aligned}$$

例 12. $a \circ b = \frac{a+b}{1+ab}$ の場合、例 5 の (II) のように S, A^+, A^- を定義すると、

$$\begin{aligned} D^+(i) &= \{j \in D(i) \mid (i,j) \in A, t_{ij} \in A^+ = [0,1)\}, \\ D^-(i) &= \{j \in D(i) \mid (i,j) \in A, t_{ij} \in A^- = [1,+\infty)\} \end{aligned}$$

であり、つぎの再帰式が成り立つ：

$$\begin{aligned} f_i &= \min_{t_{ij} \in [0,1)} \left[\frac{t_{ij} + f_j}{1 + t_{ij} f_j} \right] \wedge \min_{t_{ij} \in [1,+\infty)} \left[\frac{t_{ij} + F_j}{1 + t_{ij} F_j} \right], \\ F_i &= \operatorname*{Max}_{t_{ij} \in [0,1)} \left[\frac{t_{ij} + F_j}{1 + t_{ij} F_j} \right] \vee \operatorname*{Max}_{t_{ij} \in [1,+\infty)} \left[\frac{t_{ij} + f_j}{1 + t_{ij} f_j} \right], \quad \text{for } i \neq N, \\ f_N &= F_N = 0 \in [0, +\infty). \end{aligned}$$

例 13. $a \circ b = \frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$, の場合、例 6 の (II)' のように S, A^+, A^- を定義すると、

$$\begin{aligned} D^+(i) &= \{j \in D(i) \mid (i,j) \in A, t_{ij} \in A^+ = (0,1]\}, \\ D^-(i) &= \{j \in D(i) \mid (i,j) \in A, t_{ij} \in A^- = (-\infty,0]\} \end{aligned}$$

となり、次の再帰式が成り立つ。

$$\begin{aligned} f_i &= \min_{0<t_{ij}\le 1}\left[\frac{t_{ij}f_j}{1+(1-t_{ij})(1-f_j)}\right] \\ &\quad \wedge \min_{t_{ij}\le 0}\left[\frac{t_{ij}F_j}{1+(1-t_{ij})(1-F_j)}\right], \\ F_i &= \mathop{\mathrm{Max}}_{0<t_{ij}\le 1}\left[\frac{t_{ij}F_j}{1+(1-t_{ij})(1-F_j)}\right] \\ &\quad \vee \mathop{\mathrm{Max}}_{t_{ij}\le 0}\left[\frac{t_{ij}f_j}{1+(1-t_{ij})(1-f_j)}\right], \quad i \ne N, \\ f_N &= F_N = 1 \in (-\infty, 1]. \end{aligned}$$

3　逐次列の構成

本節では、方程式系 (2), (3), (4) の解に収束する逐次列を構成し、いくつかの具体例を述べる。方程式系 (2), (3), (4) の解の一意性（定理 2) および最適値 $f_i, F_i, i \in V$ がこの方程式の解である（定理 1) ことから、ここで構成された逐次列は、$\{(f_i, F_i) | i \in V\}$ に収束する。

そこで、

$$k=0: f_i^{(0)} \in S, \quad i=1,2,\ldots,N-1, \ f_N^{(0)} = R(\circ), \tag{14}$$

$$F_i^{(0)} \in S, \quad i=1,2,\ldots,N-1, \ F_N^{(0)} = R(\circ), \tag{15}$$

$$k \ge 1: f_i^{(k)} = \min_{j\in D^+(i)}\left[t_{ij}\circ f_j^{(k-1)}\right] \wedge \min_{j\in D^-(i)}\left[t_{ij}\circ F_j^{(k-1)}\right], \tag{16}$$

$$F_i^{(k)} = \mathop{\mathrm{Max}}_{j\in D^+(i)}\left[t_{ij}\circ F_j^{(k-1)}\right] \vee \mathop{\mathrm{Max}}_{j\in D^-(i)}\left[t_{ij}\circ f_j^{(k-1)}\right], \quad \text{for } i \ne N, \tag{17}$$

$$f_N^{(k)} = F_N^{(k)} = R(\circ) \tag{18}$$

とすると、次が成り立つ。

定理 3
上記 (14)~(18) により構成される逐次列は方程式系 (2),(3),(4) の解に高々 $(N-1)$step で収束する。

系 1

$$k=0: f_i^{(0)} = \min_{j\in D(i)} t_{ij}, \quad i=1,2,\ldots,N-1, f_N^{(0)} = R(\circ), \tag{19}$$

$$F_i^{(0)} = \mathop{\mathrm{Max}}_{j\in D(i)} t_{ij}, \quad i=1,2,\ldots,N-1, F_N^{(0)} = R(\circ) \tag{20}$$

および上記 (16)~(18) により構成される逐次列は方程式系 (2),(3),(4) の解に高々 $(N-1)$step で収束する。

注意 2 最短経路および最長経路の求め方は、以下の通りである：

$$
\begin{aligned}
f_i^{(k)} &= \min_{j\in D^+(i)}[t_{ij}\circ f_j^{(k-1)}]\wedge \min_{j\in D^-(i)}[t_{ij}\circ F_j^{(k-1)}], \\
&= t_{i\hat{j}_{(k)}(i)}\circ f_{\hat{j}_{(k)}(i)} \text{ or } t_{i\hat{j}_{(k)}(i)}\circ F_{\hat{j}_{(k)}(i)} \\
F_i^{(k)} &= \operatorname*{Max}_{j\in D^+(i)}[t_{ij}\circ F_j^{(k-1)}]\vee \operatorname*{Max}_{j\in D^-(i)}[t_{ij}\circ f_j^{(k-1)}], \\
&= t_{ij^*_{(k)}(i)}\circ F_{j^*_{(k)}(i)} \text{ or } t_{ij^*_{(k)}(i)}\circ f_{j^*_{(k)}(i)}
\end{aligned}
$$

とおき、逐次列が k'-step で収束したとすると、$\hat{j}_1=\hat{j}_{(k')}(i), j_1^*=j^*_{(k')}(i)$ とし、以下注意 1 と同様に$\hat{j}_l$, j_l^* を定義する。このとき

$$(i,\hat{j}_1,\hat{j}_2,\ldots,\hat{j}_k,\ldots,N)$$

が頂点 i から頂点 N への最短経路、

$$(i,j_1^*,j_2^*,\ldots,j_k^*,\ldots,N)$$

が頂点 i から頂点 N への最長経路である。

以下、具体例を述べる。

例 14. 図 2 のようなネットワークを考える。ただし、路長は $a\circ b=a+b-ab$ により定義されている。逐次列は、表 1 からわかるように第 3 ステップで最適値に収束し、表 2 から $(1,2,5,7)$ が最短経路、$(1,3,5,7)$ が最長経路であることがわかる。

例 15. 図 3 のようなネットワークを考える。ただし、路長は $a\circ b=\frac{a+b}{1+ab}$ により定義されている。逐次列は、表 3 からわかるように第 3 ステップで最適値に収束し、表 4 から $(1,3,6,7)$ が最短経路、$(1,2,4,7)$ が最長経路であることがわかる。

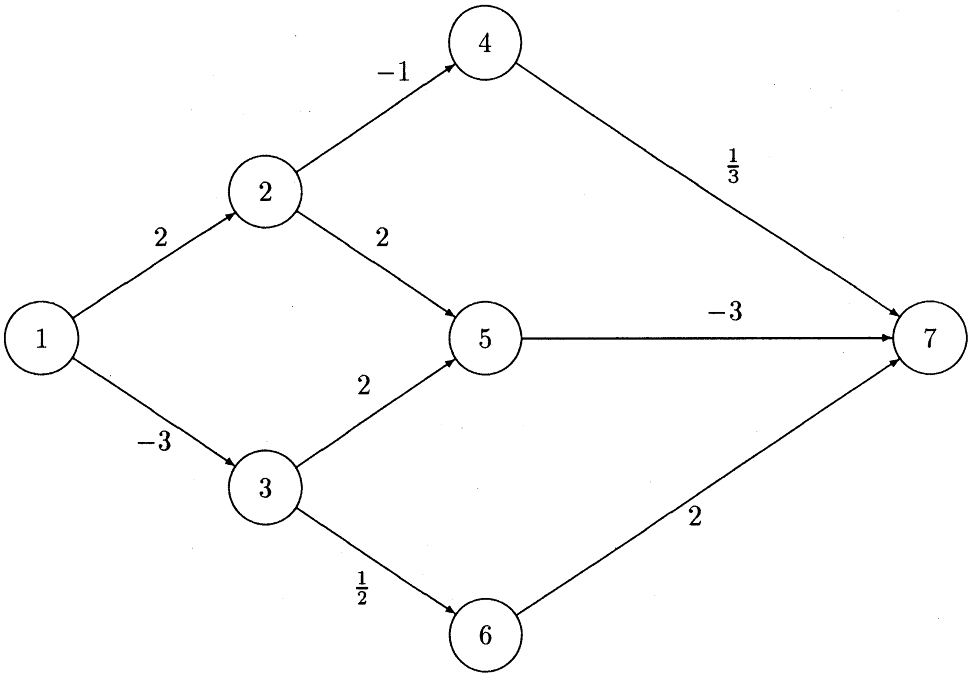

図 2: $a \circ b = a + b - ab$

表 1:

Node	$(f_i^{(0)}, F_i^{(0)})$	$(f_i^{(1)}, F_i^{(1)})$	$(f_i^{(2)}, F_i^{(2)}) = (f_i, F_i)$	$(f_i^{(3)}, F_i^{(3)})$
1	$(-3, 2)$	$(-1, 5)$	$(-3, 17)$	$(-3, 17)$
2	$(-1, 2)$	$(-\frac{1}{3}, 5)$	$(-\frac{1}{3}, 5)$	$(-\frac{1}{3}, 5)$
3	$(\frac{1}{2}, 2)$	$(\frac{3}{2}, 5)$	$(\frac{3}{2}, 5)$	$(\frac{3}{2}, 5)$
4	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
5	$(-3, -3)$	$(-3, -3)$	$(-3, -3)$	$(-3, -3)$
6	$(2, 2)$	$(2, 2)$	$(2, 2)$	$(2, 2)$
7	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$

表 2:

Node	$(\hat{j}_{(1)}(i), j^*_{(1)}(i))$	$(\hat{j}_{(2)}(i), j^*_{(2)}(i))$	$(\hat{j}_{(3)}(i), j^*_{(3)}(i))$
1	$(3,3)$	$(2,3)$	$(2,3)$
2	$(4,5)$	$(4,5)$	$(4,5)$
3	$(6,5)$	$(6,5)$	$(6,5)$
4	$(7,7)$	$(7,7)$	$(7,7)$
5	$(7,7)$	$(7,7)$	$(7,7)$
6	$(7,7)$	$(7,7)$	$(7,7)$

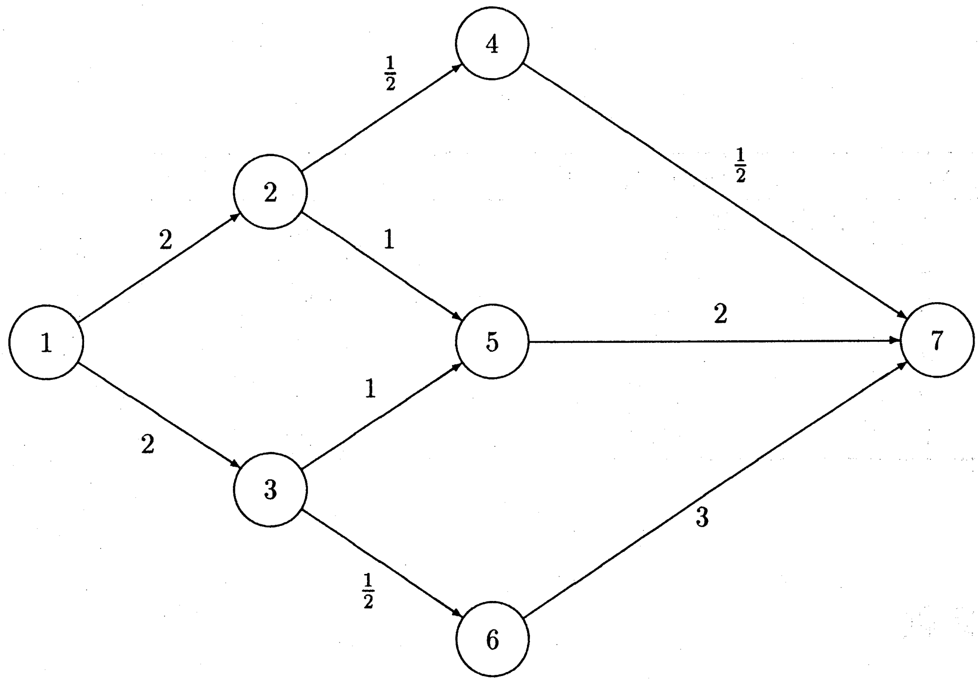

図 3: $a \circ b = \frac{a+b}{1+ab}$

表 3:

Node	$(f_i^{(0)}, F_i^{(0)})$	$(f_i^{(1)}, F_i^{(1)})$	$(f_i^{(2)}, F_i^{(2)}) = (f_i, F_i)$	$(f_i^{(3)}, F_i^{(3)})$
1	$(2, 2)$	$(1, \frac{5}{4})$	$(\frac{17}{19}, \frac{14}{13})$	$(\frac{17}{19}, \frac{14}{13})$
2	$(\frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{4}{5}, 1)$	$(\frac{4}{5}, 1)$	$(\frac{4}{5}, 1)$
3	$(\frac{1}{2}, 1)$	$(1, \frac{7}{5})$	$(1, \frac{7}{5})$	$(1, \frac{7}{5})$
4	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
5	$(2, 2)$	$(2, 2)$	$(2, 2)$	$(2, 2)$
6	$(3, 3)$	$(3, 3)$	$(3, 3)$	$(3, 3)$
7	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$

表 4:

Node	$(\hat{j}_{(1)}(i), j^*_{(1)}(i))$	$(\hat{j}_{(2)}(i), j^*_{(2)}(i))$	$(\hat{j}_{(3)}(i), j^*_{(3)}(i))$
1	$(2, 2)$ or $(2, 3)$ or $(3, 2)$ or $(3, 3)$	$(3, 2)$	$(3, 2)$
2	$(4, 5)$	$(4, 5)$	$(4, 5)$
3	$(5, 6)$	$(5, 6)$	$(5, 6)$
4	$(7, 7)$	$(7, 7)$	$(7, 7)$
5	$(7, 7)$	$(7, 7)$	$(7, 7)$
6	$(7, 7)$	$(7, 7)$	$(7, 7)$

参考文献

[1] S.Iwamoto, 動的計画論, 九州大学出版会, 1987.

[2] S.Iwamoto, *From dynamic programming to bynamic programming,* J. Math. Anal. Appl., 177, pp. 56-74 (1993).

[3] D.K.Smith, *Dynamic Programming,* Ellis Horwood Limited, 1991.

[4] M.Sniedovich, *Dynamic programming,* Marcel Dekker, 1992.